

02-02 Conjugué d'un nombre complexe

Définition et notation

Soit $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

Le **conjugué** du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Exemples

$$\overline{2 + 5i} = 2 - 5i \quad \bigg| \quad \overline{-7i} = 7i \quad \bigg| \quad \overline{6} = 6$$

Propriétés

Soit $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$ (imaginaires purs) $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Méthode

Le conjugué est utilisé pour écrire un quotient de nombres complexes sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{4-i} &= \frac{(1+i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} \\ &= \frac{3+5i}{16+1} \\ &= \frac{3}{17} + \frac{5}{17}i \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $(z ; z') \in \mathbb{C}^2$.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$
- Si $z' \neq 0$ on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

02-02 Applications du cours**Application 1**

Soit $(z ; z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer que si $z' \neq 0$, alors on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

Application 2

Déterminer sous leur forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

a] $z_1 = (1 - 2i)^2(3i + 5)$

b] $z_2 = \frac{i(3-i)}{i+9}$

Application 3

1. **a]** Soit $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $3\bar{z} - 2iz$ en fonction de x et y .

b] Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a] $iz - 2\bar{z} = i$

b] $(2 - i)z - (1 + 3i)\bar{z} = 0$

c] $\frac{\bar{z} + i}{i - z} = 3$ (avec $z \neq i$)

Application 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z^2 - 6z - 5$.

1. Démontrer que, pour tout complexe z , on a $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

2. Calculer $f(3 - 4i)$ et $f(3 + 4i)$.

Application 5

À tout nombre complexe z on associe le nombre $z' = \frac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1}$.

1. Démontrer que z' existe pour tout nombre complexe z .

2. Montrer que l'ensemble des nombres z tels que z' est réel est $\{x + \frac{i}{x} \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

3. Déterminer l'ensemble des nombres z tels que z' est un imaginaire pur.

Application 6

Déterminer les nombres complexes z tels que $\frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}}$ soit un nombre imaginaire pur.